kelompok 1

TRANSFORMASI DAN PENCERMINAN

DISUSUN OLEH:

KELOMPOK 1 (SATU)

1.AISYAH (4007005)

2.WIWIN AGUSTINA (4007018)

3.MARTINI (4007024)

4.TUKIJO (4007009)

Dosen Pengampu : Fadli, S.Si, M.Pd.

SEKOLAH TINGGI KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PERSATUAN GURU REPUBLIK INDONESIA

(STKIP-PGRI) LUBUKLINGGAU

2010

TRANSFORMASI

Transformasi berasal dari kata trans (tempat) dan formasi (perpindahan / perubahan). Jadi transformasi adalah perpindahan / perubahan tempat.

Sebab – sebab transformasi :

1. Refleksi (pencerminan)
2. Translasi (pergeseran)
3. Dilatasi (perkalian)
4. Rotasi (perputaran).

Definisi :

Misalkan V bidang Euclid. Fungsi T dari V ke V disebut suatu transformasi jika dan hanya jika T sebuah fungsi bijektif.

Persyaratan suatu transformasi,yaitu :

1. T suatu fungsi dari V ke V
2. T suatu fungsi bijektif :
   1) Fungsi tersebut adalah surjektif, artinya bahwa pada tiap titik B∈V ada prapeta. Jadi kalau T suatu transformasi maka ada A∈V sehingga B = T(A). B dinamakan peta dari A oleh T dan A dinamakan prapeta dari B.
   2) Fungsi tersebut adalah injektif, artinya kalau $A_1 \neq A_2$ dan T(A_1) $= B_1$, T(A_1) $= B_1$, T(A_2) $= B_2$ maka $B_1 \neq B_2$.

Contoh :

V bidang Euclid dan A sebuah titik tertentu pada V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut:

a) T(A) = A jika P = A
b) Jika P ∈ V dan P ≠ A. T(P) = Q dengan Q merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$.

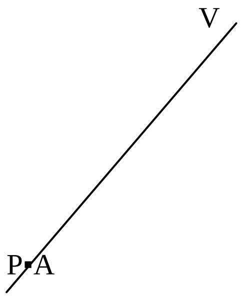
Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Penyelesaian:

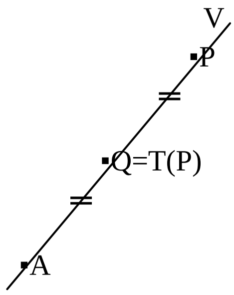
1. T fungsi V ke V

Artinya bahwa setiap unsur dari V mempunyai juga peta dari V.ambil sebarang titik P $\in$ V.karena sudah ada satu titik tertentu A$\in$V, maka terdapat dua kasus yaitu P = A atau P $\neq$ A.
Untuk P = A, berdasarkan ketentuan diatas ada titik A$\in$V (tunggal) merupakan peta dari P,sehingga A = T(P).jelas bahwa A mempunyai peta yaitu A sendiri.
untuk P$\neq$A, berdasarkan geometri ada $\overline{AP}$ $\in$ V(tunggal) dan setiap $\overline{AP}$ mempunyai titik tengah Q(tunggal).karena Q $\in$ $\overline{AP}$ dan $\overline{AP}$ $\in$V, maka Q $\in$ V.
Jadi untuk P$\neq$A, ada Q$\in$V sehingga T(P) = Q dan Q titik tengah $\overline{AP}$. Karena untuk P$\in$V, ada T(P) $\in$ V yang tunggal, maka T merupakan fungsi dari V ke V.

untuk P = A



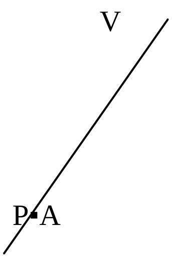
untuk P $\neq$ A



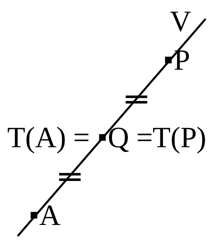
2.T fungsi bijektif

1) T fungsi surjektif
Ambil sebarang titik P $\in$ V,karena di V sudah ada satu titik A,maka keadaan P dan A ada dua kasus,yaitu P = A dan P $\neq$ A.
Untuk P = A, berdasarkan ketentuan T bagian pertama P mempunyai prapeta yaitu A sendiri.
Untuk P $\neq$ A, berdasarkan geometri ada $\overline{AP}$, dan setiap ruas garis $\overline{AP}$ selalu mempunyai titik tengah yaitu Q, dan T(P) = Q sehingga T(A) = Q juga. Jadi Q prapeta dari P dan A. Karena setiap P $\in$V mempunyai prapeta oleh fungsi T, maka fungsi T merupakan suatu fungsi surjektif.

Untuk P = A



Untuk P $\neq$ A



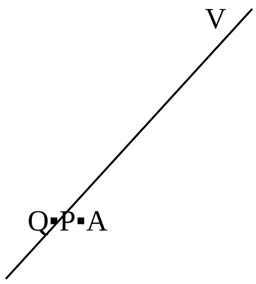
2) T fungsi injektif

Ambil dua titik sebarang misal P dan Q $\in$ Vsehingga dari keadaan ini maka terdapat kasus yaitu: P = A, Q = A dan P $\neq$ A, Q $\neq$ A.

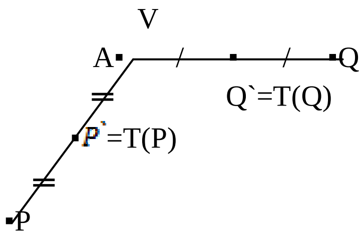
Untuk P = A, (Q) = A maka T(P) = T(Q). karena P = A T(P) = P = A Untuk Q = A T(Q) = Q = A . Telah diketahui bahwa T(P) = T(Q), maka T(P) = A. Jadi P = A dan P = Q.

Untuk P $\neq$ A,dan Q $\neq$ A maka P $\neq$ Q P, Q, A kolinier. karena P $\neq$ Q maka T(P) $\neq$ T(Q). T(P) = P` dan T(Q) = Q` sehingga P` $\neq$ Q` dan $\overline{PA}$ $\neq$ $\overline{QA}$ jadi jelas bahwa T fungsi injektif.

Untuk P = A



untuk P $\neq$ A



Karena T fungsi injektif dan fungsi surjektif maka T merupakan fungsi bijektif.

Dengan demikian dapatlah dikatakan bahwa T merupakan suatu transformasi dari V ke V.

Ditulis : T = V→V.

PENCERMINAN

Definisi :

Suatu pencerminan (refleksi) pada sebuah garis s adalah suatu fungsi M_S yang ditetapkan untuk setiap titik P pada bidang Euclid V sebagai berikut:

i. Jika P ∈ s maka Ms (P) = P.

ii. Jika P ∉ s maka Ms (P) = Q sehingga s merupakan sumbu dari $\overline{PQ}$.
Selanjutnya s disebut sumbu refleksi Ms dan Ms merupakan sumbu pencerminan.

Teorema 1.1 : Pencerminan pada garis adalah suatu transformasi.
Teorema 1.2 : Pencerminan pada garis adalah suatu isometri.

Pembuktian teorema 1.1
Ambil sebarang pencerminan, misalkan Ms

a. Ms suatu fungsi dari V ke V (bidang Euclid)
Berdasarkan definisi diatas,jelas bahwa domain dari Ms adalah V. Daerah hasil dari Ms juga pada V, sebab apabila kita mengambil X ∈ V, X ∈ s atau X ∉ s. untuk X ∈ s, Ms(x) = X ∈ V. Untuk X ∉ s,Ms(x) = y, dimana s sumbu dari $\overline{xy}$, artinya $\overline{yx}$ ⊂ V, sehingga y ∈ V, artinya adalah bidang V juga. Jadi Ms suatu fungsi dari V ke V.

b. Suatu fungsi surjektif
Ambil y ∈ V, artinya y ∈ s atau y ∉ s. Untuk y ∈ s, prapeta x = y sehingga Ms(x) = y. Untuk y ∉ s, ada x ∈ V sehingga s merupakan sumbu dari $\overline{xy}$. Hal ini berarti bahwa Ms(x) = y. Artinya y mempunyai prapeta yaitu x.

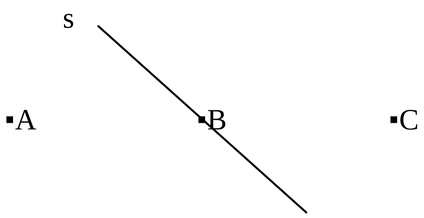
Karena setiap y ∈ V selalu mempunyai prapeta anggota V, maka Ms merupakan fungsi surjektif.

c. Ms suatu fungsi injektif
Ambil dua titik sebarang A,B ∈ V sehingga Ms (A) = Ms (B). Misalkan C = Ms (A) = Ms (B), artinya C ∈ s atau C ∉ s.
Untuk C ∈ s, maka A,B ∈ s. Akiatnya Ms (A) = A, Ms (B) = B, jadi A = B.
Untuk C ∈ s, s sumbu dari AC dan BC. Akibatnya A = B. Karena untuk setiap pasangan A , B ∈ V sehingga Ms (A) = Ms (B) mengakibatkan
A = B, maka Ms suatu fungsi injektif.
Karena Ms suatu fungsi dari V ke V dan bijektif, maka Ms suatu transformasi.

Disamping teorema itu suatu pencerminan pada garis mengawetkan jarak (jarak tidak berubah) maka disebut isometri.

Contoh :

Misalkan diberikan titik A, B, dan C serta garis s seperti pada gambar di bawah ini:



Lukis: a).titik A\` sehingga A\` = M_s(A)

b) titik B\` sehingga B\` = M_s(B)

c) titik C\` sehingga C\` = M_s(C)

Penyelesaian :

a. Karena A\`= $M_s$(A) dan A $\notin$ s,maka s merupakan sumbu dari $\overline{A`A}$. Artinya A\` terletak pada garis $\ell$ yang melalui A dan tegak lurus terhadap s, sehingga apabila $\{N\} = \ell \cap$ s,maka AN = NA\` dan A dengan A\` terletak pada sisi yang berbeda oleh s.

b. Karena B\`= $M_s$ (B) dan B $\in$ s, maka B\` = B.

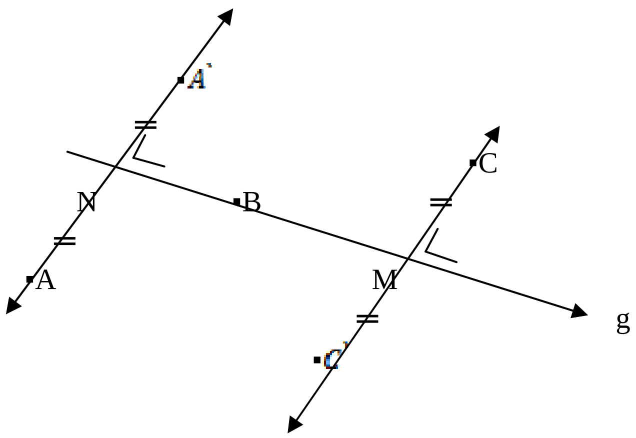
c. Karena C = M_s (C\`) dan C $\notin$ s, maka s merupakan sumbu dari $\overline{CC`}$. Akibatnya C\` terletak pada garis m yang melalui C dan tegak lurus s,sehingga jika $\{M\}$ = m$\cap$s, maka CM = MC\` dan C dan C\` terletak pada sisi yang berbeda oleh s.

Lukisan

a) Buat garis ℓ melalui A tegak lurus g. Cari N = $\ell \cap$ g. Buat ruas garis $\overline{NA`} \cong \overline{AN}$, sehingga $\overline{NA`} \in \ell$ dan A\` dan A tidak terletak pada sisi yang sama oleh g (lihat gambar).

b) Jelas

c) Buat garis m melalui C tegak lurus g. Cari M = m $\cap$ g. Buatlah ruas garis $\overline{MC`} \cong \overline{CM}$, sehingga $\overline{MC`} \in$ m dan C\` dan C tidak terletak pada sisi yang sama oleh g (lihat gambar)



Contoh soal :

1. Diberikan suatu titik A pada bidang Euclid v. ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap P $\in$ V : 1) T(P) = P jika P $\in$ g

   2) T(P) = P\` sehingga P titik tengah $\overline{AP}$, jika P $\neq$ A.

   Apakah relasi T merupakan suatu transformasi ?

2. Diberikan garis g pada bidang Euclid v. ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap titik P $\in$ V: 1) T(P) = A jika P = A

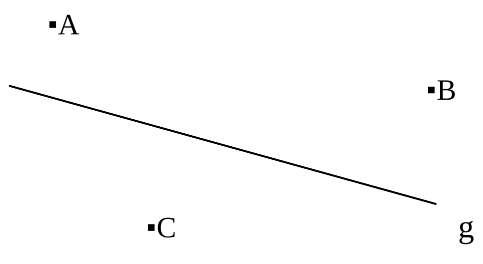
   2) T(P) = Q jika g sumbu dari $\overline{PQ}$.

   Apakah relasi T merupakan suatu transformasi ?

3. T : V $\rightarrow$ V. Didefinisikan sebagai berikut :
   Apabila P(x,y) maka :
   a) T(P) = (x+1,y). Untuk x $\geq$0
   b) T(P) = (x-1,y). untuk x $<$ 0

   Apakah T suatu transformasi ?

4. Diberikan h = $\{(x, y) \mid y = 2\}$
   a) Jika A = (3,$\sqrt{2}$) tentukan A\` = Ms (A)
   b) Jika D\` = (2,-4) tentukan prapeta dari D\` oleh Ms
5. Diberikan dua titik A dan B. lukis garis s sehingga Ms(A) = B. kemudian tentukan Ms (B).
6. Diberikan garis g dan titik-titik A dan B dan sebuah garis g seperti gambar di bawah ini .



Lukis : a) A\`= μ_g (A)

b)B\`= μ_g(B)

c)C\` sehingga $\mu_g$(C\`)=C

Penyelesaian :

1. Karena untuk sebarang P ∈ V dapat ditinjau kasus : P = A atau P ≠ A. untuk P = A berdasarkan 1) ada tunggal T(P) = A ∈ V.
   Untuk P ≠ A ada tunggal $\overline{AP}$ dan ada tunggal $\bar{A}$. Akibatnya ada tunggal P\` ∈ $\bar{A}$sehingga P titik tengah $\overline{AP}$\`. Karena P\` ∈ $\bar{A}$ ⊆ v, maka P\` ∈ V.
   Jadi untuk setiap P ∈ V ada tunggal T(P) ∈ V. sehingga memenuhi ketentuan relasi T. Jadi relasi T merupakan fungsi dari V ke V.
   Ambil sebarang unsur Q ∈ v. dalam hal ini ada dua kasus : Q = A atau
   Q ≠ A.
   Untuk Q = A berdasarkan 1) ada prapeta Q yaitu A
   Untuk Q ≠ A ada $\overline{QA}$ ⊂ V, mengakibatkan ad $\overline{QA}$ ⊂ V. dengan sendirinya, maka ada P ∈ $\overline{QA}$ sehingg P\` titik tengah $\overline{QA}$. Artinya ada prapeta dari Q oleh T yaitu P\`. karena P\` ∈ $\overline{QA}$ ⊂ V, maka P\` ∈ V. Jadi fungsi T merupakan fungsi surjektif.
   Ambil dua titik sebarang x,y ∈ V, sehingga T(x) = T(y), misalkan z = T(x) = T(y), artinya x titik tengah dari $\overline{Az}$ dan y titik tengah dari $\overline{Az}$. Jadi x = y, sehingga fungsi T meupakan fungsi injektif.
   Maka dapat dikatakan bahwa T suatu transfornasi.

2. Karena untuk sebarang P ∈V dapat ditinjau kasus : P ∈ g, atau P ∉ g. Untuk P ∈ g berdasarkan
   1) T(P) ada tunggal, yaitu P sendiri. Akibatnya T(P) ∈ V. untuk P ∉ g berdasarkan Q ada tunggal garis l melalui P ⊥ g. akibatnya ada tunggal Q ∈ ℓ. sehingga berdasarkan
   2)T(P) = Q. karena ℓ ⊂ V, Q ∈ ℓ. maka Q ∈ V.
   Jadi untuk setiap P ∈ V, maka T(P) ada dan tunggal, serta T(P) ∈V. Jadi relasi T suatu fungsi dari V ke V.
   Ambil sebarang unsur Q ∈ V. dalam hal ini ada dua kasus : Q ∈ g dan Q ∉ g. untuk Q ∈ g, bedasarkan a)ada prapeta dari Q yaitu Q sendiri. Untuk Q ∉ g, ada garis m melalui Q sehingga m⊥g. akibatnya ada titik P ∈ m sehingga g sumbu dari $\overline{PQ}$. Artinya T(P) = Q atau P prapeta dari Q mempunyai prapeta. Jadi fungsi T merupakan fungsi surjekif.
   Ambil dua unsur sebarang A dan B pada V sehingga T(A) = T(B). misalkan x = T(A) = T(B), maka g sumbu dari $\overline{Ax}$ dan $\overline{Bx}$. Akibatnya B = A, jadi fungsi T merupakan fungsi injektif.
   Kesimpulan, dari uraian di atas maka dapat dikatakan bahwa T merupakan suatu transformasi.

3. Bukti bahwa relasi T adalah fungsi dari V ke V.

   Ambil sebarang titik P = (x,y) ∈ V, ada dua kasus : untuk x ≥ 0, x + 1 ∈ R dan tunggal, akibatnya (x+1,y) ∈ V tunggal. Untuk x< 0,x-1 ∈ R dan tunggal, akibatnya (x-1,y) ∈V tunggal. Sehingga P ∈ V selalu mempunyai peta di V tunggal. Jadi relasi T merupakan fungsi dari V ke V.

   Ambil (0,0) ∈ V sehingga (0,0) = T(P) = (x+1,y), jika x≥0 didapat x = -1 dan y = 0. Dalam hal ini terjadi kontradiksi dengan persyaratan x ≥ 0. Akibatnya (-1,0) bukan prapeta dari (0,0). Berdasarkan a) apabila (0,0) = T(P) = (x-1,y), jika x<0 didapat, x = 1 dan y = 0, dan ini pun terjadi lagi kontadiksi dengan persyaratan x < 0. Akibatnya (1,0) bukan prapeta dari (0,0) berdasarkan b) akibat dari dua hal ini (0,0) tidak mempunyai prapeta oleh T. Akibatnya fungsi T bukan fungsi surjektif. Jadi relasi T bukan suatu transformasi.

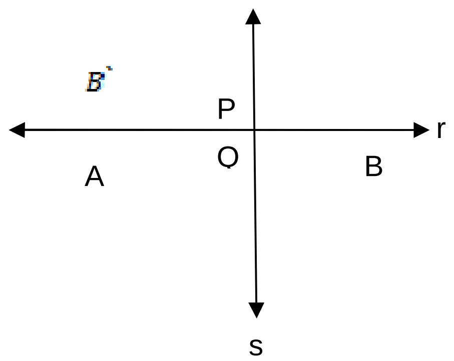
4. Karena h = $\{(x, y) \mid y = 2\}$, maka μ_h (P) = (x, 4 – y), ∀ (x, y) ∈ v (teorema 2.6 bagian iv)

   a). Karena A = (3,$\sqrt{2}$), maka A\` μ_h (A) = μ_h {(3,$\sqrt{2}$)} = (3, 4 - $\sqrt{2}$)

   b). Misalkan Prapeta dari D\` maka $\mu_h$ (D) = D\`. Akibatnya D = μ_h (D\`)

   = μ_h [(2, -4)] = (2, 4 + 4) = (2, 8)

5. Karena Ms (A) = (B), maka s sumbu dari $\overline{AB}$. Akibatnya, buat $\overline{AB}$, cari Titik tengah $\overline{AB}$,missal Q. buat garis s melalui Q tegak lurus garis $\overline{AB}$ Menentukan Ms (B), misalkan B\` = Ms(B). Buat garis s melalui B tegak lurus s, cari $\{p\}$ = s∩r. Buat $\overline{PB`}$ ≅ $\overline{BP}$, sehingga $\overline{PB`}$ ⊂ r dan B\` dengan B pada sisi yang berbeda terhadap s. karena $\overline{AB}$ ⊥ s dan r ⊥s melalui B, maka $\overline{AB}$ = r. karena $\overline{BP`}$ = $\overline{P`B`}$ dan $\overline{P`B`}$ ⊂r, P ∈ s dan s melalui Q serta sumbu dari $\overline{AB}$, maka Q = P dan A = B\`.



6. a). Karena A\` = $\mu_g$ (A) maka g sumbu dari  Artinya buat garis $\ell$ melalui A tegak lurus g, cari {N} = $\ell \cap$ g. buat $\overline{NA`} \cong \overline{AN}$, Sehingga $\overline{NA`} \subset \ell$ dan A\` tidak pada posisi yang yang sama dengan A terhadap g.

   b). Dengan cara yang serupa seperti a), yaitu buat garis h melalui B tegak lurus g. cari = {M} = h $\cap$ g. Buat $\overline{MB`} \cong \overline{BM}$, sehingga $\overline{MB`} \subset$ h dan B\` pada sisi yang berbeda dari B terhadap g.

   c). Karena μ_g (c) = C, maka g sumbu dari $\overline{C`C}$. Buat garis k melalui C tegak lurus g. Cari {P} = k $\cap$ g. Buat $\overline{PC`} \cong \overline{CP}$, sehingga $\overline{PC`} \subset$ k dan C\` dengan C pada sisi yang berbeda terhadap g.