GEOMETRI TRANSFORMASI

SETENGAH PUTARAN

Disusun Oleh :

Kelompok Empat (V1 A)

1. Purna Irawan (4007178)
2. Sudarsono (4007028 p)
3. Mellyza Vemi R. (4007217)
4. Kristina Nainggolan (4007013)
5. Desi Kartini (4007026)

Dosen Pengampu : Fadli,S.Si.,M.Pd.

Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Persatuan Guru Republik Indonesia

(STKIP PGRI LLG)

2010

SETENGAH PUTARAN

Suatu setengah putaran mencerminkan setiap titik bidang pada sebuah titik tertentu. Oleh karena itu setengah putaran juga dinamakan penceminan pada suatu titik atau refleksi pada suatu titik.

Definisi :

Misalkan V bidang Euclid dan A titik tertentu pada bidang V, setengah putaran pada titik A adalah fungsi S_A yang didefinisikan untuk setiap titik P pada V sebagai berikut :

i) Apabila P = A, maka S_A (P) = A   A   V

ii) Apabila P $\neq$ A, maka S_A (P) = Q sehingga A titik tengah $\overline{PQ}$ (ruas garis PQ)   V

P   A   Q

Contoh :

Diberikan A,B dan C adalah titik-titik pada bidang Euclid V.

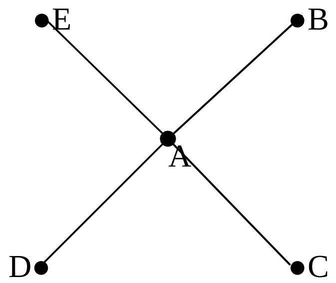
Lukis : a) titik D sehingga D = S_A (B)

b) titik E sehingga E = S_A (C)

penyelesaian :

a) D = S_A (B) , A adalah titik tengah dari $\overline{BD}$ karena B $\neq$ A maka ada ruas garis AB. Kemudian anda perpanjang ruas garis $\overline{AB}$ kearah titik A oleh ruas garis $\overline{AB}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{AB}$, akibatnya anda mendapatkan ruas garis $\overline{BD}$ dimana A merupakan titik tengah ruas garis $\overline{BD}$.Artinya D = S_A (B)

b) $C = S_A(E)$, A adalah titik tengah dari $\overline{EC}$ karena $C \neq A$ maka ada ruas garis $\overline{AC}$ kemudian anda perpanjang ruas garis $\overline{AC}$ ke arah titik A oleh ruas garis $\overline{AE}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{AC}$. Akibatnya anda mendapatkan ruas garis $\overline{EC}$ dimana titik A sebagai titik tengahnya, artinya $C = S_A(E)$.



Untuk membuktikan bahwa setiap setengah putaran adalah suatu transformasi anda harus menunjukan 3 hal yaitu :

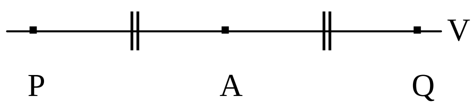
a) $S_A(P) \in V, \forall P \in V$ artinya $S_A : V \to V$
b) S_A fungsi kepada, dan
c) S_A fungsi satu-satu.

Penjelasan :

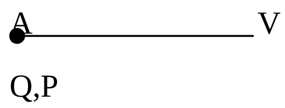
a) Ambil $P \in V$ sebarang, apabila $P = A$ maka $S_A(P) = A$, karena $A \in V$ maka $S_A(P) \in V$.

   Apabila $P \neq A$, maka $\overline{PA} \subset V$

   Misalkan $Q = S_A(P)$, A titik tengah $\overline{PQ}$, artinya $A \in \overline{PQ}$ maka $\overline{PQ} \subset \overline{AP}$ karena $A,P \in V$ maka $\overline{AP} \subset V$. karena $\overline{PQ} \subset \overline{AP}$ dan $\overline{AP} \subset V$ jadi $\forall P \in V$ maka $S_A(P) \in V$ dengan kata lain $S_A : V \to V$



b) Ambil Q titik sebarang pada V apabila Q = A maka ada P ∈ V, yaitu P = A sehingga S_A (P = A) = Q = A apabila Q ≠ A maka $\overline{AQ}$ ⊂V karena $\overline{AQ}$ ⊂ V maka ada P ∈V sehingga A titik tengah dari $\overline{PQ}$ hal ini berarti bahwa apbila Q ≠ A ada P ∈ V sehingga S_A (P) = Q jadi S_A fungsi kepada.



Q = A,maka ada P ∈ V

P = A sehingga S_A (P=A)=Q=A

c) ambil P dan R titik sebarang pada V, sehingga S_A (P) = S_A (R).

apabila S_A (P) = S_A (R) = A maka P = A = R

apabila S_A (P) = S_A (R) = S dengan S ≠ A

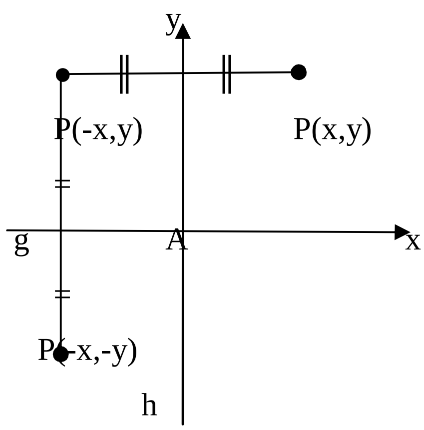
Hal ini berakibat bahwa A titik tengah $\overline{PS}\ dan\ \overline{RS}$.

Karena A titik tengah $\overline{PS}\ dan\ \overline{RS}\ maka\ \overline{PS} = \overline{RS}$

$\overline{PS} = \overline{RS}$ maka P = R, karena untuk sebarang P dan R pada V sehingga $S_A(P) = S_A(R)$, anda dapat menunjukan bahwa P = R, maka S_A merupakan fungsi satu-satu,

Teorema 1 .

Andaikan A sebuah titik dan g dan h dua garis tegak lurus yang berpotongan di A maka $S_A = K_g K_h$



Bukti : Karena g⊥h maka kita dapat membuat sebuah sumbu ortogonal dengan g sebagai sumbu x dan h sebagai sumbu y, A dipakai sebagai titik asal.

Dibukikan bahwa untuk setiap P berlaku $S_A(P) = K_g K_h$(P). andaikan P(x,y) ≠ A dan andaikan pula bahwa $S_A(P) = P'(-x_1, y_1)$ oleh karena A titik tengah $\overline{PP'}$ maka (0,0) = $\left\{\frac{x_1+x}{2}, \frac{y_1+y}{2}\right\}$, sehingga $x_1 + x$=0 dan $y_1 + y$=0 atau $x_1 = -x$ dan $y_1 = -y$ jadi S_A(P) = P(-x,-y).

Perhatikan sekarang komposisi pencerminan

$(K_g K_h)(P) = (K_g(P)) = K_g[(-x, y)]$ = (-x,-y)

Jadi kalau P ≠ A maka S_A(P) = $K_g K_h$(P)

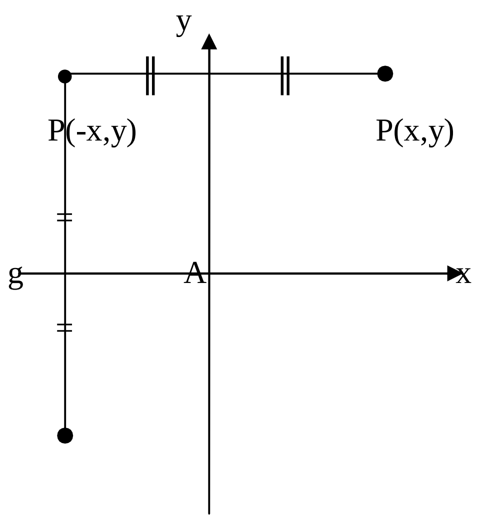
Jadi P = A maka $K_g K_h$(P) = S_A(A) = A

Sedangkan S_A(A) = A jadi juga $K_g K_h$(A) = S_A(A)

Sehingga untuk setiap P pada bidang berlaku $K_g K_h$(A) = S_A(P) ini berarti $K_g K_h$= S_A.

Teorema 2.

Jika g dan h dua garis yang tegak lurus maka $K_g K_h$= $K_h K_g$.



P(-x,-y)

h

Bukti : Kalau P = A maka $K_g K_h$(A)= K_g(A) juga $K_h K_g$(A)= K_h(A) = A.

Sehingga $K_g K_h$(A)= $K_h K_g$(A), untuk P ≠ A maka $K_g K_h$= S_A, selanjutnya $K_g K_h$(P) = K_h((-x,-y)) = (-x,-y) = S_A(P) jadi $K_h K_g$= S_A sehingga diperoleh $K_g K_h$= $K_h K_g$.

Teorema 3 . Jika setengah putaran, maka $S_A{}^{-1}$ = S_A

Bukti : Andaikan g dan h dua garis yang tegak lurus maka $K_g K_h$=S_A dengan A titik potong antara g dan h jadi $(K_g K_h)^{-1}$ = $K_h{}^{-1} K_g{}^{-1}$ =$S_A{}^{-1}$.

Oleh karena $K_h{}^{-1}$=K_h dan $K_g{}^{-1}$ =K_g maka $K_h K_g$ = $S_A{}^{-1}$,

$K_h K_g$=$K_g K_h$ oleh karena g⊥h jadi $S_A{}^{-1}$=$K_g K_h$=S_A

Teorema 4. Jika A = (a,b) dan P(x,y) sebarang titik maka S_A(P) = (2a-x, 2b-y).

Bukti : Misalkan Q=(x_0, y_0)=S_A(P) maka A titik tengah dari $\overline{PQ}$ sehingga anda mendapat hubungan ,

a = $\frac{x+x_0}{2}$ dan b = $\frac{y+y_0}{2}$

didapat persamaan x_0= 2a - x dan y_0= 2b - y. jadi S_A(P) = (2a –x , 2b - y) ,

$\forall P$ = (x,y)

contoh : ambil garis g sebagai sumbu x dan garis h sebagai sumbu y akibatnya, apabila │A│= g∩h, maka A= (0,0), ambil titik sebarang P = (x,y).

penyelesaian :

$a = \frac{x + x_0}{2}$, $b = \frac{y + y_0}{2}$

x_0 = 2a – x , y_0 = 2b – y

= 2.0 – x , = 2.0 – y

= - x , = -y

S_A (P) = $S_{(0,0)}$ (x, y)

= (-x , -y)………………………………….(1)

mengenai persamaan pencerminan berturut-turut kita mendapatkan

K_h(P) = $K_h\left[(x_1, y)\right]$=(-x_1,y) dan

K_g(P) = $K_g\left[(x_1, y)\right]$= (x_1,-y)

Sehingga ($K_g o K_h$)(P) = $K_g\left(K_h(P)\right)$

$= K_g\left(K_h(x_1, y)\right)$

$= K_g(-x_1, y)$

$= (-x_1, -y)$……………….(2)

Berdasarkan (1) dan (2) disimpulkan bahwa

S_A(P) = $(K_g o K_h)$(P) , $\forall P = (x_1, y)$

Jadi = $K_g o K_h$

Sifat-sifat setengah putaran dan pencerminan ditetapkan ketentuan invarian, kolinier dan dilatasi, seperti dituangkan dalam definisi-definisi dan teorema-teorema berikut ini.

Definisi : Misalkan A suatu titik tertentu pada bidang Euclid dan T suatu transformasi. Titik A disebut titik invarian pada transformasi T jika dan hanya jika berlaku T(A) = A.

Teorema : Setiap refleksi ada garis mempunyai tak hingga titik invarian.

Bukti : Berdasarkan definisi dari suatu refleksi (penderminan) pada sebuah garis, misalnya sumbu refleksinya adalah garis g maka anda mengetahui bahwa

i) K_g (P) = P jika P $\in$ g

ii) K_g (P) = Q jika g sumbu dari $\overline{PQ}$

Akibatnya, $\forall P \in$ g, jelas bahwa K_g(P) = P. artinya P titik invarian pada K_g ini. Karena garis g mempunyai tak hingga titik. Hal ini berakibat bahwa titik invarian dari K_g adalah tak hingga, yaitu semua titik garis g. karena sumbu refleksi diambil sebarang garis g, maka anda simpulkan bahwa setiap refleksi pada garis mempunyai tak hingga titik invarian.

Teorema : Setiap setengah putaran mempunyai tepat satu titik invarian.

Bukti : Ambil S_A sebarang setengah putaran. Jelas bahwa hanya P = A sehingga S_A (A) = A. berdasarkan definisi diatas, jelas bahwa A titik invarian pada S_A. Jadi S_A mempunyai tepat satu titik invarian. Karena S_A sebarang setengah putaran mempunyai tepat satu titik invarian.

Definisi : Sebuah transformasi T yang mempunyai sifat bahwa sebuah garis petanya adalah sebuah garis. T disebut kolinear.

Teorema : Setiap refleksi pada garis merupakan suatu kolinear.

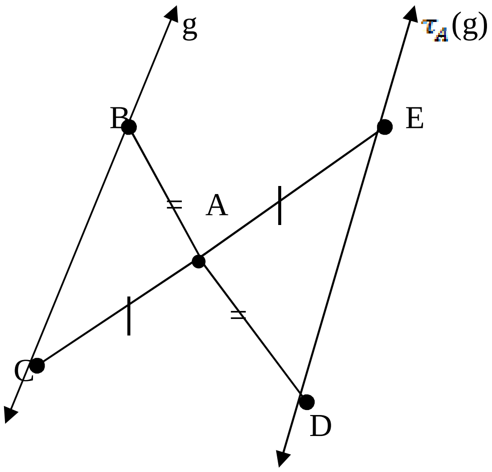
Bukti : Ambil K_g sebarang refleksi pada garis g. Berdasarkan modul anda mengetahui bahwa K_g suatu isometri. Karena suatu isometri bersifat mengawetkan garis, artinya peta dari suatu garis adalah garis lagi oleh suatu isometri, maka K_g mengawetkan garis. Berdasarkan definisi diatas anda simpulkan bahwa K_g suatu kolinier. Karena K_g diambil sebarang refleksi pada garis, maka setiap refleksi merupakan suatu kolineasi.

Teorema : Setiap setengah putaran merupakan suatu kolinear.

Bukti : Karena setengah putaran merupakan suatu isometri dan karena suatu isometri mengawetkan garis, maka setengah putaran merupakan kolinear.

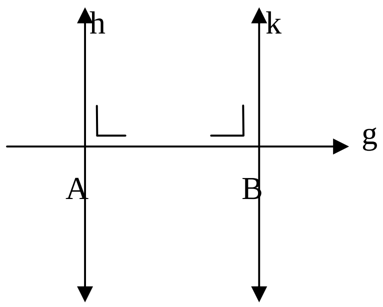
Definisi : Suatu kolineasi yang mempunyai sifat bahwa peta dan prapeta sejajar disebut dilatasi.

Teorema : Ambil S_A sebarang setengah putaran dan g sebarang garis. Apabila g melalui titik A, maka S_A (g) = g. jadi S_A (g) = g // g. apabila g tidak melalui titik A. ambil B,C ∈ g, misalkan D = S_A (B), E = S_A (C). maka AB = AD, AC = AE, dan ∠ BAC ≅ ∠ DEA, sebab B,A,D dan C,A,D masing-masing terletak pada satu garis, jadi $\Delta\, BCA \cong \Delta\, DAE$ (s-sd-s). akibatnya $\angle\, BCA \cong \angle\, DEA$. Karena $\angle\, BCA \cong \angle\, DEA$ dan E juga A terletak pada satu garis, maka $\overleftrightarrow{BC}$ // $\overleftrightarrow{DE}$. karena g = $\overleftrightarrow{BC}$ dan S_A (g) = $\overleftrightarrow{DE}$, maka S_A (g) // g. jadi S_A merupakan dilatasi.



Teorema : komposit dua setengah putaran dengan pusat yang berbeda tidak memiliki titik invarian.

Bukti : Ambil S_A dan S_B dengan A ≠ B. misalkan namakan $\overleftrightarrow{AB}$ dengan garis g dan buat garis h melalui A tegak lurus g dan garis k melalui B tegak lurus garis g



Akibatnya S_A = K_h o K_g dan S_B = K_go K_k. Sehingga didapat :

= S_A o S_B = (K_ho K_g) o (K_go K_k),subtitusi

= K_h o (K_go K_g) o K_k, asosiatif

= K_h o ε o K_k, K_g o K_g= ε, identitas

= (K_h o ε) o K_k, asosiatif

= K_h o K_g , ε, identitas.

Andaikan x titik invarian dari S_A o S_B artinya (S_A o S_B) (x) = x. karena

S_A o S_B = K_h o K_k, maka (K_h o K_k) (x) = x

Jadi K_h o $[(K_h \, o \, K_k)(x)]$ = K_h (x)

(K_h o K_h) o $[K_k(x)]$ = K_h(x), asosiatif

$\varepsilon \; o \; [K_k(x)]$ = K_h (x), K_h o K_h = ε

$K_k(x) = K_h(x), \varepsilon$ identitas

Misalkan K_k(x) = K_h (x) = y maka, k sumbu dari $\overline{xy}$ dan h juga sumbu dari $\overline{xy}$. Akibatnya h = k. terjadi kontradiksi dengan h berbeda dari k, sebab masing-masing melalui titik A dan B yang berbeda. Jadi pengandaian bahwa x titik invarian dari S_A o S_B adalah salah. Sehingga anda simpulkan bahwa S_A o S_B tidak memiliki titik invarian.

Teorema : Apabila diberikan titik A dan B sehingga A ≠ B, maka hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B.

Bukti : ada dua hal yang harus kita tunjukan, yaitu :

i) Adanya setengah putaran yang memetakan A ke B dan
ii) Tidak lebih dari satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B

i) Karena A ≠ B, maka ada ,hal ini mengakibatkan adanya D, sehingga D titik tengah $\overline{AB}$, artinya ada setengah putaran S_D sehinggaS_D (A) = B
ii) Andaikan ada dua buah setengah putaran S_D dan S_E sehingga S_D (A) = B dan S_E (A) = B. akibatnya S_D(A) = S_E(A). selanjutnya diperoleh

$$S_D^{-1}[S_D(A)] = S_D^{-1}[S_E(A)]$$
$$(S_D^{-1} \, o \, S_D)(A) = S_D[S_D(A)]$$
$$\varepsilon(A) = (S_D \text{ o } S_E)(A)$$
$$A = (S_D \, o \, S_E)(A)$$

Akibatnya A titik invarian dari S_D o S_E apabila D ≠ E maka S_D o S_E tidak memiliki titik invarian. Sehingga hal ini berakibat bahwa D = E, jadi S_D o S_E. Kesimpulannya hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B, yaitu S_D dimana untuk D titik tengah $\overline{AB}$.

Teorema : Apabila T sebuah transformasi, L himpunan titik-titik dan A sebuah titik tertentu, maka A ∈ T(L) jika dan hanya jika T^{-1}(A) ∈ L.

Bukti : Yang harus kita tunjukan dalam hal ini dua hal, yaitu

i) Jika A ∈ T^{-1}(L) maka T^{-1} ∈ Q dan
ii) Jika T^{-1} (A) ∈ L maka A ∈ T(L)

i) Karena T(L) = $\{y \mid = T(x), x \in L\}$ dan diberikan A ∈ T(L) maka ada x ∈ L sehingga A = T(x). akibatnya kita mendapatkan $T^{-1}[T(x)]$ = (T^{-1} o T)(A) (x = ε (x) = x, karena x ∈ L, maka T^{-1}(A) ∈ L.
ii) Karena diberikan T^{-1} ∈ L, ini berarti bahwa T$[T^{-1}(A)]$ ∈ T(L). (T o T^{-1})(A) ∈ T(L)
   $\varepsilon\,(A)$ ∈ T(L)
   Jadi A ∈ T(L)

Untuk memantapkan teorema diatas, anda pelajari contoh berikut ini.

Contoh : diberikan L = $[(x,y) \mid x^2 + 4y^2 = 16]$ dan A = (4,-3) dan B = (3,1). Jika g adalah sumbu x, selidiki apakah A ∈ $(K_g o S_B)$(L) ?

Penyelesaian :

Karena $(K_g o S_B)^{-1}$= S_B^{-1} o K_g = S_B o K_g dan

$S_B\,[x,y]$ = (2.3-x,2.1-y) = (6-x, 2-y) ∀ (x,y) ∈ V

$K_g\,[(x,y)]$ = (x,-y), ∀ (x,y) ∈ V

Maka $(K_g o S_B)^{-1}[(x,y)]$ = (S_B o K_g) (x,y)

$= (S_B[K_g(x,y)]$

$= S_B[(x,-y)]$

= (6-x, 2+y)

Sehingga (K_g o S_B)(A) = (6-4,2-3) = (2,1). Karena $(2)^2$+$4(1)^2$ = 4+4 = 8 ≠ 16, maka (2,1) ∉ L atau (K_g o S_B)(A) ∉ L. berdasarkan teorema diatas, kita simpulkan bahwa A ∉ (K_g oS_B)(L).

Dengan mempelajari uraia-uraian diatas, anda diharapkan memperoleh gambaran yang bulat mengenai pengertian setengah putaran, sifat-sifat setengah putaran dan persamaan setengah putaran.

Soal :

1) Diberikan tiga titik A,B, P tidak kolinier dan berbeda

   Lukis : a) S_A (P)

   b) R sehingga S_B (R) = P

   c) (S_A o S_B) (P)

   d) (S_B o S_A) (P)

2) Apabila C = (-4,3) dan g = $\{(x,y) \mid y = -x\}$, tentukan :

   a) (K_g o S_C) $[(2,-1)]$

   b) (K_g o S_C) (P) jika P = (x,y)

c) $(K_g \ o \ S_C)^{-1}$(P)

Apakah k_g o S_C = S_C o K_g ? jelaskan

3) a. Apabila A = (0,0), B = (-4,1), tentukan K sehingga (S_A o S_B) (K)=(6,2)

b. Apabila (K_g o S_A)(P) = R, nyatakanlah koordinat P dengan koordinat R.

Penyelesaian :

1) a) misalkan S_A (P) = Q, diketahui P $\neq$ A, maka A titik tengah $\overline{PQ}$.

Hubungan titik A dengan P didapat $\overline{AP}$, perpanjang $\overline{AP}$ ke arah A dengan $\overline{AQ}$, sehingga AQ = AP.

b) Karena S_B (R) = P, maka $S_B^{-1}\ [S_B(R)] = S_B^{-1}$(P)

(S_B^{-1} o S_B)(R) = S_B(P)

$\therefore$ R = S_B (P).

Cara melukis R = S_B (P) serupa dengan a)

c) (S_A o S_B)(P) = $S_A\ [S_A(P)]$, berdasarkan b) S_B(P) = (R),

= S_A(R).

Misalkan S = S_A(R), dengan cara serupa seperti a) anda mendapatkan titik S, sehingga S = (S_A o S_B)(P).

d) (S_B o S_A)(P) = $S_B\ [S_A(P)]$, berdasarkan a) S_A(P) = Q

= S_B (Q)

Misalkan x = S_B (Q) dengan cara serupa seperti a) anda dapatkan titik x sehingga x = (S_B o S_A)(P)

2) a) Karena S_C(P) = (-8 - x, 6 – y), ∀P = (x,y) dan K_g(P) = (-y,-x) maka

(K_go S_C)$[(2,-1)]$ = $K_g[S_C(2,-1)]$ = K_g(-10, 7) = (-7, 10)

b) (K_g o S_C)(P) = $K_g[S_C(P)] = K_g[(-8-x, 6-y)]$ = (y-6, x+8)

c) Karena $(K_g \, o \, S_C)^{-1}$(P) = S_C o K_g, maka $(K_g \, o \, S_C)^{-1}$(P) = (S_C o K_g)(P)

$\Longrightarrow (K_g \, o S_C)^{-1}$(P) = $S_C[K_g(P)] = S_C[-y, -x]$= (-8 + y, 6 + x).

Karena (y-6, x+8) $\neq$ (-8+y, 6+x), $\forall$x,y $\in$ R,R semua himpunan bilangan real, maka $k_g oS_C \neq S_C oK_g$.

3) a) Karena (S_A o S_B)(K) =(6,2), maka K = (S_B o S_A) $[(6{,}2)]$ = $S_B[S_A(6{,}2)]$ = S_B (-6,-2) = (-8 + 6,2-2) = (-2,0)

b) Karena (K_g o S_A)(P) = R, maka P = (S_A o K_g)(R).